ISSN 1733-8670

ZESZYTY NAUKOWE NR 5(77)
AKADEMII MORSKIEJ
W SZCZECINIE

OBSŁUGIWANIE MASZYN I URZĄDZEŃ OKRĘTOWYCH
O M i U O 2 0 0 5

Jacek Kaczmarek, Grzegorz Nicewicz

Wrażliwość parametryczna reologicznego i fizycznego modelu wibroizolatora gumowego

Słowa kluczowe: wrażliwość parametryczna, wibroizolator,
model reologiczny i fizyczny wibroizolatora

W artykule przedstawiono analizę porównawczą wrażliwości parametrycznej modelu reologicznego i fizycznego pryzmatycznych wibroizolatorów gumowych o zmiennych liniowo własnościach względem częstości sił wymuszających.

Parametric Sensitivity of Rheological and Physical Model of Rubber Vibration Mount for Vibration Isolation Systems

Key words: parametric sensitivity, vibration mount, rheological
and physical model of a vibration mount

The paper contains a comparative analysis of parametric sensitivity of rheological and physical model of vibration mounts for vibration isolation systems with linearly changing properties versus the frequency of forces.

Wstęp

W klasycznych metodach identyfikacji parametrów reologicznego modelu wibroizolatora, tj. modułu Younga i współczynnika strat, opartych na pomiarze transmitancji wąskopasmowej modelu reologicznego wibroizolatora, pomija się masę własną wibroizolatora [1, 3, 4]. W artykule [5] przedstawiono metodę identyfikacji wymienionych parametrów opartą również na znajomości transmitancji wąskopasmowej modelu fizycznego, ale uwzględniającą masę własną wibroizolatora.

Istotnym elementem badań własności dynamicznych układów mechanicznych jest badanie zależności zmian odpowiedzi modelu układu, w szczególności charakterystyk częstościowych (w rozważanym przypadku charakterystyki fazowej i amplitudowej transmitancji wąskopasmowej), od niewielkich zmian parametrów modelu, zwanych wrażliwością parametryczną.

Ocena zmian odpowiedzi wymaga wyboru właściwej miary wrażliwości. W przypadku układów harmonicznych najwłaściwszą miarą jest wrażliwość różniczkowa względna lub logarytmiczna [6].

W niniejszym artykule porównano wrażliwość parametryczną pierwszego rzędu (tj. przy różniczkowych zmianach zachowawczego modułu Younga i współczynnika strat materiału wibroizolatora) charakterystyki fazowej i amplitudowej transmitancji widmowej wąskopasmowej modelu reologicznego i modelu fizycznego. Ze względu na nieliniowość modelu wibroizolatora, tj. zależność jego parametrów od częstości sił wymuszających, wykorzystuje się jedynie transmitancję wąskopasmową.

1. Miary wrażliwości parametrycznej modelu

Do oceny wpływu zmian parametru p na charakterystykę częstościową H przyjmuje się dwa współczynniki wrażliwości różniczkowej [2, 6]:

– względny współczynnik wrażliwości WW

$$WW = \frac{\partial H}{\partial \ln p} = \frac{\partial H}{\partial p} p \tag{1}$$

– logarytmiczny współczynnik wrażliwości WL

$$WL = \frac{\partial \ln H}{\partial \ln p} = \frac{\partial H}{\partial p} \cdot \frac{p}{H} \tag{2}$$

oraz dwa współczynniki oceny globalnej wrażliwości parametrycznej charakterystyki H na zmiany parametru p w badanym przedziale częstości $\nu_1 \div \nu_k$:

– średni względny współczynnik wrażliwości SWW

$$SWW = \frac{\sum_{i=1}^{k-1} \left| WW(\nu_i) \cdot (\nu_{i+1} - \nu_i) \right|}{\sum_{i=1}^{k-1} \left| H(\nu_i) \cdot (\nu_{i+1} - \nu_i) \right|} \tag{3}$$

– średni logarytmiczny współczynnik wrażliwości SWL

$$SWL = \frac{\sum_{i=1}^{k-1} \left| WL(\nu_i) \cdot (\nu_{i+1} - \nu_i) \right|}{\nu_k - \nu_1} \tag{4}$$

2. Wrażliwość parametryczna modelu reologicznego

Na podstawie badań modelu reologicznego symetrycznego, pryzmatycznego, jednorodnego wibroizolatora gumowego pokazanego na rysunku 1 [3, 4], jego transmitancja zespolona wąskopasmowa dla drgań podłużnych (najbardziej istotnych z punktu widzenia ustalonej pracy wibroizolatora) może być przedstawiona w postaci wyrażenia:

$$G(\mathrm{j}\nu) = \frac{X(\mathrm{j}\nu)}{Y(\mathrm{j}\nu)} = \frac{E(\nu)\left[E(\nu)\left(1+\eta^2(\nu)\right) - \frac{mh\nu^2}{A_0}\right] - \mathrm{j}E(\nu)\eta(\nu)\frac{mh\nu^2}{A_0}}{\left[E(\nu) - \frac{mh\nu^2}{A_0}\right]^2 + E^2(\nu)\,\eta^2(\nu)} \tag{5}$$

gdzie:

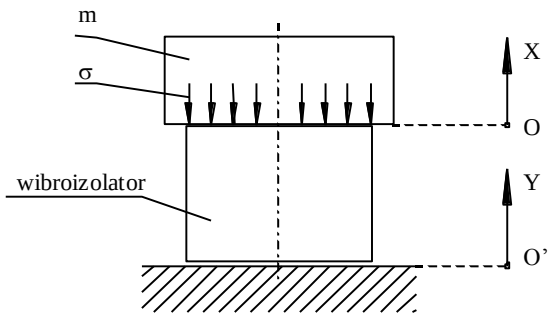
$X(\mathrm{j}\nu)$, $Y(\mathrm{j}\nu)$ – zespolone przemieszczenie przekroju końcowego wibroizolatora i podłoża,

$E(\nu)$, $\eta(\nu)$ – moduł zachowawczy Younga i współczynnik strat materiału wibroizolatora,

h, A_0 – wysokość i pole powierzchni przekroju nieobciążonego wibroizolatora,

ν – częstość sinusoidalnie zmiennego ruchu podłoża,

m – masa dodatkowa dołączona do górnej powierzchni wibroizolatora (rys. 1).



Rys. 1. Schemat układu wibroizolatora z masą dodatkową *m* do badań transmitancji wąskopasmowej dla drgań podłużnych wibroizolatora
Fig. 1. A schematic diagram of the vibration mount with additional mass m for testing narrow band transmittance for longitudinal vibration

Moduł i fazę transmitancji określają wyrażenia:

$$G(\nu)=\frac{E(\nu)\sqrt{\left\{E(\nu)\left[1+\eta^2(\nu)\right]-\frac{mh\nu^2}{A_0}\right\}^2+\eta^2(\nu)\left(\frac{mh\nu^2}{A_0}\right)^2}}{\left[E(\nu)-\frac{mh\nu^2}{A_0}\right]^2+E^2(\nu)\eta^2(\nu)} \tag{6}$$

$$\varphi_G(\nu)=\operatorname{arc\,tg}\frac{-\eta(\nu)\frac{mh\nu^2}{A_0}}{E(\nu)\left[1+\eta^2(\nu)\right]-\frac{mh\nu^2}{A_0}} \tag{7}$$

Można wykazać, że współczynniki wrażliwości różniczkowej względnej modułu $G(\nu)$ i fazy $\varphi_G(\nu)$ transmitancji $G(\mathrm{j}\nu)$ względem parametru p (E lub η) są określone wyrażeniami:

$$WW_{G/p}=\frac{\operatorname{Re}\left[\frac{\partial G(\mathrm{j}\nu)}{\partial p}\cdot G^*(\mathrm{j}\nu)\right]}{G(\nu)}\cdot p \tag{8}$$

$$WW_{\varphi/E}=\frac{E(\nu)\eta(\nu)\left[1+\eta^2(\nu)\right]\left(\frac{mh\nu^2}{A_0}\right)}{\left\{E(\nu)\left[1+\eta^2(\nu)\right]-\frac{mh\nu^2}{A_0}\right\}^2+\left(\eta(\nu)\frac{mh\nu^2}{A_0}\right)^2} \tag{9}$$

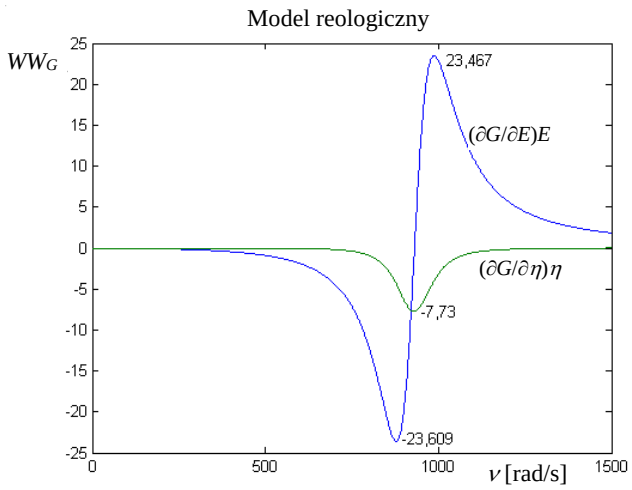
$$WW_{\varphi/\eta} = \frac{-\dfrac{m h \nu^2}{A_0}\left\{E(\nu)\left[1-\eta^2(\nu)\right]-\dfrac{m h \nu^2}{A_0}\right\}\eta(\nu)}{\left\{E(\nu)\left[1+\eta^2(\nu)\right]-\dfrac{m h \nu^2}{A_0}\right\}^2+\left(\eta(\nu)\dfrac{m h \nu^2}{A_0}\right)^2} \tag{10}$$

gdzie, na podstawie badań identyfikacyjnych wibroizolatora gumowego [4], przyjęto liniową zależność modułu E i współczynnika strat η w postaci:

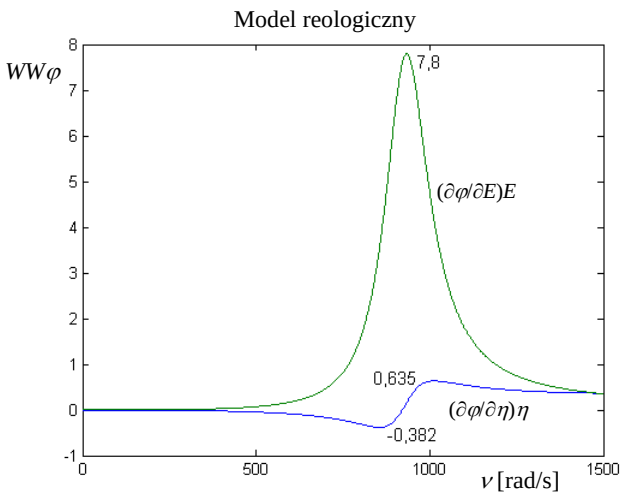
$$\begin{aligned} E(\nu) &= 5410 \cdot \nu + 5{,}99 \cdot 10^6 \\ \eta(\nu) &= 0{,}000111 \cdot \nu + 0{,}025 \end{aligned} \tag{11}$$

Wykresy zależności współczynników wrażliwości względnej WW transmitancji wąskopasmowej modelu reologicznego badanego wibroizolatora od częstości ν sinusoidalnego ruchu podłoża (rys. 1), przedstawiono na rysunkach 2 i 3.

Ocenę globalnej wrażliwości parametrycznej transmitancji $G(\mathrm{j}\nu)$ modelu reologicznego badanego wibroizolatora, w obszarze analizowanych częstości $\nu = 0 \div 1500$ rad/s, przedstawiono w tabeli 1.



Rys. 2. Wrażliwość różniczkowa WW_G modułu $G(\nu)$ transmitancji $G(\mathrm{j}\nu)$ modelu reologicznego
Fig. 2. Differential sensitivity WW_G of modulus $G(\nu)$ of rheological model transmittance $G(\mathrm{j}\nu)$



Rys. 3. Wrażliwość różniczkowa WW_φ fazy φ_G transmitancji $G(\mathrm{j}\,\nu)$ modelu reologicznego; $(\partial\varphi/\partial E)\cdot E$ – względem modułu E, $(\partial\varphi/\partial\eta)\cdot\eta$ – względem współczynnika strat η

Fig. 3. Differential sensitivity WW_φ of phase φ_G of rheological model transmittance $G(\mathrm{j}\,\nu)$; $(\partial\varphi/\partial E)\cdot E$ – versus modulus E, $(\partial\varphi/\partial\eta)\cdot\eta$ – versus loss factor η

Tabela 1

Wartości średniego względnego *SWW* i logarytmicznego *SWL* współczynnika wrażliwości transmitancji $G(\mathrm{j}\,\nu)$ modelu reologicznego badanego wibroizolatora

Values of the mean relative SWW and logarithmic SWL sensitivity factor of transmittance $G(\mathrm{j}\,\nu)$ for the examined vibration mount rheological model

Charakterystyka	Parametr	*SWW*	*SWL*
moduł G	E	2,21	1,639
	η	0,311	0,136
faza φ_G	E	1,106	1,685
	η	0,216	0,629

3. Wrażliwość parametryczna modelu fizycznego

W artykule [5] przedstawiono fizyczny model wibroizolatora gumowego oraz moduł $G(\nu)$ i fazę φ_G jego transmitancji dla drgań podłużnych:

$$\varphi_G(\nu) = \operatorname{arc\,tg} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n k}{\gamma_n^2} \sqrt{\frac{1+\eta^2}{\left(\omega_n^2 - \nu^2\right)^2 + \left(\eta\omega_n^2\right)^2}} \sin\left(\frac{\omega_n}{k} h\right) \cos(\psi - \varphi_n)}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n k}{\gamma_n^2} \sqrt{\frac{1+\eta^2}{\left(\omega_n^2 - \nu^2\right)^2 + \left(\eta\omega_n^2\right)^2}} \sin\left(\frac{\omega_n}{k} h\right) \sin(\psi - \varphi_n)} \tag{12}$$

$$G(\nu) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n k}{\gamma_n^2} \sqrt{\frac{1+\eta^2}{\left(\omega_n^2 - \nu^2\right)^2 + \left(\eta\omega_n^2\right)^2}} \sin\left(\frac{\omega_n}{k} h\right) \sin(\varphi_G + \psi - \varphi_n) \tag{13}$$

gdzie:

$k = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$, ρ – gęstość materiału wibroizolatora,

$\operatorname{tg} \frac{\omega_n}{k} h = \frac{m_w}{m \frac{\omega_n}{k} h}$, m_w – masa własna wibroizolatora,

$$\gamma_n^2 = \frac{mh}{m_w} \sin^2\left(\frac{\omega_n}{k} h\right) + \frac{h}{2}\left(1 - \frac{\sin\left(2\frac{\omega_n}{k} h\right)}{2\frac{\omega_n}{k} h}\right),$$

$\psi = \operatorname{arc\,tg} \eta$,

$\varphi_n = \operatorname{arc\,tg} \frac{\eta}{1 - \frac{\nu^2}{\omega_n^2}}$ dla $1 - \frac{\nu^2}{\omega_n^2} > 0$,

$\varphi_n = \pi + \operatorname{arc\,tg} \frac{\eta}{1 - \frac{\nu^2}{\omega_n^2}}$ dla $1 - \frac{\nu^2}{\omega_n^2} < 0$,

m, h – masa dołączona do wibroizolatora i jego wysokość.

Można wykazać, że współczynniki względnej wrażliwości parametrycznej fazy φ_G transmitancji wąskopasmowej modelu fizycznego określone są wyrażeniami:

$$WW_{\varphi/E} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E(\nu)\,\eta(\nu)\,\rho\left(h\,\nu\,\varphi_n\right)^2}{\left(E(\nu)\,\varphi_n^2 - \rho\,h^2\nu^2\right) + \left(E(\nu)\,\eta(\nu)\,\varphi_n^2\right)} \tag{14}$$

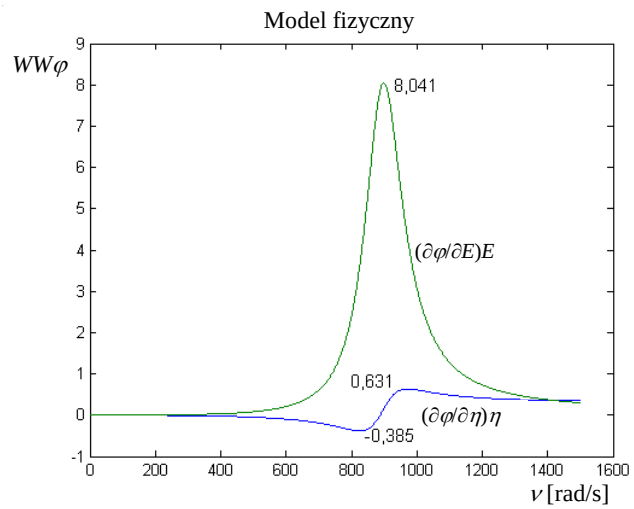
$$WW_{\varphi/\eta} = \frac{\eta(\nu)}{1+\eta^2(\nu)} - \eta(\nu)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\dfrac{\rho}{E(\nu)}\left(\dfrac{h\nu}{\varphi_n}\right)^2}{\eta^2(\nu)+\left(1-\dfrac{\rho}{E(\nu)}\left(\dfrac{h\nu}{\varphi_n}\right)^2\right)^2} \tag{15}$$

oraz w postaci niejawnej (ze względu na obszerność wyrażeń) współczynniki względnej wrażliwości modułu transmitancji $G(\nu)$:

$$WW_{G/E} = \frac{\partial G(\nu)}{\partial E(\nu)} E(\nu); \qquad WW_{G/\eta} = \frac{\partial G(\nu)}{\partial \eta(\nu)} \eta(\nu) \tag{16}$$

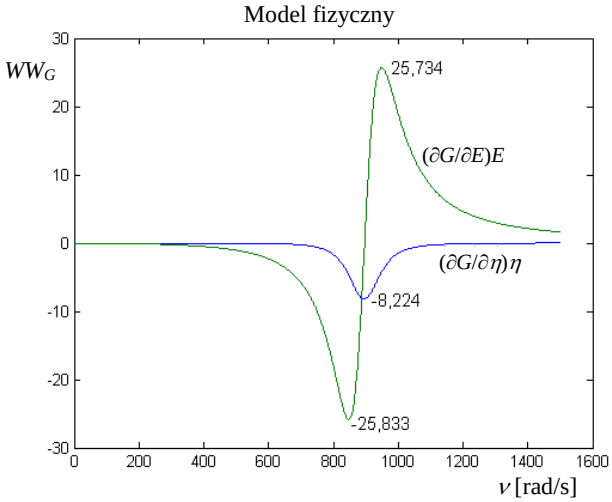
gdzie funkcję zmienności modułu $E(\nu)$ i współczynnika strat $\eta(\nu)$ przyjęto jak dla modelu reologicznego, według (11). Wykresy współczynników pokazano na rysunkach 4 i 5.

Ocenę globalnej wrażliwości parametrycznej transmitancji modelu fizycznego badanego wibroizolatora, w obszarze analizowanych częstości $\nu = 0 - 1500$ rad/s, przedstawiono w tabeli 2.



Rys. 4. Współczynnik wrażliwości względnej fazy φ_G transmitancji modelu fizycznego badanego wibroizolatora; $(\partial\varphi/\partial E)\cdot E$ – względem modułu E, $(\partial\varphi/\partial\eta)\cdot\eta$ – względem współczynnika strat η

Fig. 4. Relative sensitivity factor of phase φ_G of the examined vibration mount physical model transmittance; $(\partial\varphi/\partial E)\cdot E$ – versus modulus E, $(\partial\varphi/\partial\eta)\cdot\eta$ – versus loss factor η



Rys. 5. Współczynnik wrażliwości względnej modułu *G* transmitancji modelu fizycznego badanego wibroizolatora; $(\partial G/\partial E)\cdot E$ – względem modułu *E*, $(\partial G/\partial \eta)\cdot \eta$ – względem współczynnika strat η

Fig. 5. Relative sensitivity factor of modulus G of the examined vibration mount physical model transmittance; $(\partial G/\partial E)\cdot E$ – versus modulus E, $(\partial G/\partial \eta)\cdot \eta$ – versus loss factor η

Tabela 2

Wartości średniego względnego *SWW i* logarytmicznego *SWL* współczynnika wrażliwości transmitancji modelu fizycznego badanego wibroizolatora

Values of the mean relative SWW and logarithmic SWL sensitivity factor of the examined vibration mount physical model transmittance

Charakterystyka	Parametr	*SWW*	*SWL*
moduł *G*	*E*	2,281	1,685
	η	0,307	0,128
faza φ_G	*E*	1,006	1,625
	η	0,203	0,609

Wnioski

1. Stwierdzono znikomy wpływ wyższych od pierwszej harmonicznych przestrzennych modelu fizycznego, zarówno na same charakterystyki częstościowe modelu, jak i na ich wrażliwości parametryczne. Pominięcie wyższych harmonicznych powoduje błędy nie przekraczające 1%.

2. Maksymalna względna wrażliwość $WW_{\varphi/E}$ fazy transmitancji modelu fizycznego względem modułu Younga oraz $WW_{G/\eta}$ modułu transmitancji względem współczynnika strat występuje, podobnie jak dla modelu reologicznego, w punkcie rezonansowym. Wartości wrażliwości modelu fizycznego są wyższe odpowiednio o 3% i 6%.
3. Względna wrażliwość $WW_{\varphi/\eta}$ fazy transmitancji względem współczynnika strat oraz $WW_{G/E}$ modułu transmitancji względem modułu Younga jest zerowa w punkcie rezonansowym modelu fizycznego, podobnie jak modelu reologicznego. Identyfikacja parametrów modelu wibroizolatora na podstawie pomiarów transmitancji w punkcie rezonansowym jest więc najmniej wiarygodna. Potwierdzeniem tego są znaczne odchylenia wartości identyfikowanych parametrów w punkcie rezonansowym od wartości funkcji regresji w tym punkcie [5].
4. Względna wrażliwość transmitancji modelu fizycznego jak i reologicznego maleje do zera w znacznym oddaleniu od punktu rezonansowego. Największą wiarygodność identyfikacji uzyskuje się więc w niezbyt odległym otoczeniu punktów rezonansowych, ale, jak stwierdzono już wcześniej, nie w punkcie rezonansowym. Aby uzyskać wiarygodną identyfikację w szerokim przedziale częstości należałoby wykonać pomiary transmitancji układu z różną masą dodatkową dołączaną do wibroizolatora. W obszarze wysokich częstości dołączona masa musi być względnie mała. Wiarygodność modelu reologicznego, nie uwzględniającego masy własnej wibroizolatora, jest więc w tym obszarze częstości znacznie gorsza niż modelu fizycznego.
5. Wartości średnie wrażliwości względnej i logarytmicznej transmitancji modelu fizycznego są na ogół nieznacznie niższe, niż modelu reologicznego (o około 1 – 10%), z wyjątkiem wrażliwości względem modułu Younga, która jest wyższa o około 3% dla modelu fizycznego. Wrażliwość średnia względem modułu Younga w rozpatrywanym przedziale częstości dla obu modeli jest zdecydowanie większa od 1, a w przypadku $SWW_{G/E}$ – od 2, natomiast wrażliwość średnia względem współczynnika strat nie przekracza, niestety 0,63. Wiarygodność identyfikacji modułu Younga za pomocą obu modeli jest więc wysoka, w przeciwieństwie do wiarygodności identyfikacji współczynnika strat.

Literatura

1. Giergiel J., Uhl T., *Identyfikacja układów mechanicznych*, PWN, Warszawa 1990.
2. Gutowski R., Radziszewski R., Olas A., *Stateczność i wrażliwość w układach mechanicznych*, Praca zbiorowa IPPT PAN, Ossolineum 1978.

3. Kaczmarek J., *Zwalczanie drgań i hałasu*, WSM, Szczecin 2002.
4. Kaczmarek J., Nicewicz G., Idzi Z., *Identyfikacja wybranych własności reologicznych wibroizolatorów gumowych*, Zeszyty Naukowe Akademii Morskiej w Szczecinie, nr 1(73), Szczecin 2004, s. 255 – 267.
5. Kaczmarek J., Nicewicz G., Idzi Z., *Identyfikacja parametrów reologicznych wibroizolatorów gumowych na podstawie ich modelu fizycznego*, Zeszyty Naukowe Akademii Morskiej w Szczecinie, nr 5(77), Szczecin 2005, s. 279 – 292.
6. Nowak A., Wojnarowski J., *Badanie wrażliwości parametrycznej dyskretnych układów mechanicznych*, XIX Sympozjon *Modelowanie w mechanice*. Zbiór referatów. Gliwice – Szczyrk 1980.
7. Wicher J., *Analiza właściwości materiału wibroizolacyjnego opisanego modelem reologicznym*, Prace IPPT PAN nr 31, Warszawa 1981.

Wpłynęło do redakcji w lutym 2005 r.

Recenzenci

prof. dr hab. inż. Stanisław Radkowski
dr hab. inż. Cezary Behrendt

Adresy Autorów

dr inż. Jacek Kaczmarek
mgr inż. Grzegorz Nicewicz
Akademia Morska w Szczecinie
Instytut Nauk Podstawowych Technicznych
Zakład Mechaniki Technicznej i Rysunku
ul. Wały Chrobrego 1/2, 70-500 Szczecin