ISSN 0209-2069

ZESZYTY NAUKOWE NR 65
WYŻSZEJ SZKOŁY MORSKIEJ
W SZCZECINIE

EXPLO-SHIP 2002

Andrzej Banachowicz

Sterowalność dynamicznego układu stacjonarnego w ujęciu rachunku operatorów Bittnera

Słowa kluczowe: teoria sterowania, rachunek operatorów

Podano aksjomatykę rachunku operatorów Bittnera oraz przykład wykorzystania tej teorii w analizie układów dynamicznych. Algebraizacja metod analizy matematycznej ma już swoją historię, Wywodzi się ona z przekształceń całkowych Laplace'a i Fourier'a. Innym podejściem jest teoria operatorów Mikusińskiego, którą rozwinął i uogólnił profesor Ryszard Bittner.

The Controllability of Steady State Dynamic Systems by Bittner's Operational Calculus

Keywords: control theory, operational calculus

This article introduces the Bittner's operational calculus axiomatics and an example of its application in the analysis of dynamic systems. The first steps in the general operational calculus were created by Laplace and Fourier transformations. In this context the operational calculus of Mikusinski, further developed by Bittner, is very interesting and powerful.

Wprowadzenie

Uogólnienie pojęcia procesu w fizyce i technice spowodowało powstanie terminu – układ dynamiczny. Badaniami układów dynamicznych (technicznych) zajmuje się automatyka, zaś modelami matematycznymi tych układów – teoria sterowania [6, 7, 9, 11]. Od kilkunastu lat problematyką tą zajmują się również matematyka, w ramach matematycznej teorii sterowania [13, 16], przy czym matematyczna teoria sterowania ukształtowała się przede wszystkim na gruncie teorii równań różniczkowych. Jeszcze innym kierunkiem badania układów dynamicznych była algebraizacja metod analizy matematycznej. Pierwszym krokiem na tej drodze była transformacja (przekształcenie) Laplace'a. Nadal jest stosowana jako ważna metoda rozwiązywania równań i układów równań różniczkowych zwyczajnych. Przekształcenie to jest zaliczane do rachunku operatorowego [10]. Inne podejście do rozwiązywania tych zagadnień reprezentuje fundamentalna praca profesora Jana Mikusińskiego [8]. Skromna swoją objętością, ale zawierająca nowe idee, zapoczątkowała rozwój rachunku operatorów. Kontynuatorami tej myśli byli profesorowie: Stanisław Bellert [2, 3], Ryszard Bittner [4, 5] i Danuta Przeworska-Rolewicz [12]. Później zainteresowano się tym podejściem nawet w odległej Japonii [15]. Moim zdaniem, najciekawsze i najbardziej uogólnione ujęcie podał profesor Bittner, rozwinięte później przez Jego uczniów. Jedną z drobnych cząstek zastosowań rachunku operatorów opracowanego przez Profesora, podaje prezentowany artykuł.

Chciałbym zaznaczyć, że podana w artykule literatura nie jest przeglądem dokonań poszczególnych, cytowanych autorów, ale pozycjami najbardziej ogólnymi i reprezentatywnymi dla prezentowanych przez nich kierunków badań.

1. Aksjomaty rachunku operatorów

Podstawę pojęciową rachunku operatorów stanowią określenia: pochodnej abstrakcyjnej oraz określonych za jej pomocą i poprzez system aksjomatów – pierwotnej i warunku granicznego. Są to uogólnione pojęcia pochodnej, całki i warunku granicznego, znane z kursu analizy matematycznej. Rozszerzeniem tej teorii jest pojęcie wyniku i μ-operatora (w tym operatora Heaviside'a). Ogólny schemat rachunku operatorów Bittnera stanowi podstawę uogólnienia równań różniczkowych, a tym samym i układów dynamicznych w teorii sterowania.

Przejdźmy do pojęć wstępnych. Na początek przyjmijmy, że X i Y są przestrzeniami liniowymi nad ciałem K.

Definicja 1

Odwzorowanie h: $X \to Y$ nazywamy homomorfizmem, gdy zachodzą następujące warunki:

a) $\forall x_1, x_2 \in X \qquad h(x_1 + x_2) = h(x_1) + h(x_2) \qquad (1)$

b) $\forall x \in X \ \forall \alpha \in K \qquad h(\alpha x) = \alpha h(x) \qquad (2)$

Homomorfizm, który jest injekcją nazywamy monomorfizmem. Homomorfizm będący surjekcją nazywamy epimorfizmem. Monomorfizm będący równocześnie epimorfizmem nazywamy izomorfizmem. Jeżeli $X = Y$, to taki homomorfizm nazywamy endomorfizmem. Endomorfizm będący izomorfizmem nazywamy automorfizmem.

Definicja 2

Epimorfizm $S \in L(\mathrm{L}^1, \mathrm{L}^0)$, gdzie L^1, L^0 są dowolnymi przestrzeniami liniowymi, nazywamy pochodną abstrakcyjną (w skrócie: pochodną).

Definicja 3

Homomorfizmy $T_q \in L(\mathrm{L}^1, \mathrm{L}^0)$, gdzie $q \in Q$ jest zbiorem wskaźników, spełniające warunek:

$$ST_q f = f, \quad f \in L^0 \qquad (3)$$

nazywamy pierwotnymi.

Definicja 4

Epimorfizm $s_q \in L(\mathrm{L}^1, \mathrm{Ker}S)$ określony wzorem:

$$s_q = \mathrm{id}_{\mathrm{L}^1} - T_q S \qquad (4)$$

nazywamy warunkiem granicznym.

W klasycznej analizie matematycznej pochodna abstrakcyjna jest zwykłą pochodną, pierwotna – całką oznaczoną, a warunek graniczny – warunkiem granicznym lub brzegowym. Uogólnienie tych pojęć umożliwia ich szersze stosowanie niż tylko na zbiorze funkcji różniczkowalnych.

Podamy teraz definicję, która nosi nazwę aksjomatów rachunku operatorów.

Definicja 5

Rachunkiem operatorów nazywamy układ $CO(L^0, L^1, S, T_q, s_q, Q)$[1], gdzie L^0, L^1 są przestrzeniami liniowymi oraz zachodzą następujące aksjomaty:

A1. $S \in L(L^1, L^0)$, $S(L^1) = L^0$,

$T_q \in L(L^1, L^0)$,

$s_q \in L(L^1, \mathrm{Ker}S)$, $s_q(L^1) = \mathrm{Ker}S$,

Q – dowolny zbiór wskaźników q,

A2. $ST_q f = f$, czyli $ST_q = \mathrm{id}_{L^0}$,

A3. $T_q Sx = x - s_q x$, czyli $T_q S = \mathrm{id}_{L^1} - s_q$.

Opis aksjomatów i wnioski z nich.

2. Sterowność układu dynamicznego

Rozpatrzmy dynamiczny układ stacjonarny opisany równaniem:

$$S\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \tag{5}$$

z warunkami granicznymi:

$$s_{q_0}\mathbf{x} = \mathbf{x}_{0,q_0} = \mathbf{0} \tag{6}$$

$$s_{q_k}\mathbf{x} = \mathbf{x}_{0,q_k} \tag{7}$$

gdzie:

$\mathbf{x}$ – wektor stanu,
$\mathbf{u}$ – wektor sterowań,
$\mathbf{A}$ – macierz endomorfizmów układu,
$\mathbf{B}$ – macierz endomrofizmów sterowań,
$q_0, q_k \in Q$ i $q_0 < q_k$.

[1] Symbol CO oznacza pierwsze litery skrótu angielskiego „Calculus Operational" (rachunek operatorów).

Definicja 6

Układ (5) nazywamy sterowalnym, gdy $\forall \mathbf{x} \in L_n^1 \ \exists \mathbf{u} \in L_m^0$ takie, że spełnione są warunki graniczne (6) i (7).

Z twierdzenia podanego w pracy [1] (3.3) wynika, że rozwiązaniem układu (5) – (6) jest element:

$$\mathbf{x} = e^{\mathbf{A}t_{q_0}} T_{q_0} e^{-\mathbf{A}t_{q_0}} \mathbf{Bu} \tag{8}$$

gdzie $e^{\mathbf{A}t_q}$ jest uogólnioną funkcją wykładniczą.

Twierdzenie

Układ dynamiczny (5) jest sterowalny wtedy i tylko wtedy, gdy macierz $\mathbf{W} = [W_{ij}]_{nxn}$, W_{ij} – endomorfizmy przemienne, określona wzorem:

$$\mathbf{W} = s_{q_k} e^{\mathbf{A}t_{q0}} T_{q_0} e^{-\mathbf{A}t_{q0}} \mathbf{BB}^{\mathrm{T}} e^{-\mathbf{A}^{\mathrm{T}} t_{q0}} \tag{9}$$

jest nieosobliwa.

Sterowaniem, przy powyższych warunkach, może być wektor:

$$\mathbf{u} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}} e^{-\mathbf{A}^{\mathrm{T}} t_{q0}} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{x}_{0,q_k} \tag{10}$$

Jednakże sterowanie to nie jest jedynym. Sterowaniem może być również następujący wektor:

$$\mathbf{u}' = \mathbf{u} + \mathbf{z}, \tag{11}$$

o ile element **z** spełnia poniższy warunek graniczny:

$$s_{q_k} e^{\mathbf{A}t_{q0}} T_{q_0} e^{-\mathbf{A}^{\mathrm{T}} t_{q0}} \mathbf{Bz} = \mathbf{0} \tag{12}$$

Zakończenie

Przedstawiony w zarysie rachunek operatorów Bittnera umożliwia uogólnienie wielu pojęć i rozwiązań stosowanych w teorii sterowania. Tutaj ograniczono się tylko do jednego przypadku – sterowalności układu dynamicznego. Korzystając z pojęć pochodnej abstrakcyjnej, pierwotnej i warunku granicznego możemy badać układy dynamiczne opisane różnymi modelami rachunku operatorów – równania różniczkowe, różnicowe – co świadczy o równoważności operatorowej tych układów. Umożliwia to wykorzystanie jednolitej metodyki badań układów ciągłych i dyskretnych. Ma to bardzo istotne znaczenie w zastosowaniach technicznych, w przypadku wykorzystania cyfrowych układów automatycznej regulacji (np. cyfrowych autopilotów).

Dotychczas opublikowane opracowania [4, 5, 14, 1] świadczą o dużych możliwościach wykorzystania rachunku operatorów do opisu i analizy układów dynamicznych. Ciekawym zagadnieniem jest badanie właściwości układów dynamicznych z punktu widzenia samego rachunku operatorów. Odrębnych badań wymagają układy nieliniowe [1, 5] oraz stochastyczne.

Literatura

1. Banachowicz A.: *Związek rachunku operatorów z teorią sterowania*, praca magisterska, Instytut Matematyki Uniwersytetu Gdańskiego, Gdańsk 1984.
2. Bellert S.: *Metoda operatorów liniowych*, Rozprawy elektrotechniczne, tom V, Zeszyt 4, 1959.
3. Bellert S.: *Rachunek operatorów w przestrzeniach liniowych*, Rozprawy elektrotechniczne, tom VI, Zeszyt 3, 1960.
4. Bittner R.: *Rachunek operatorów w przestrzeniach liniowych*, PWN, Warszawa 1974.
5. Bittner R.: *Rachunek operatorów w grupach*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1992.
6. Kaczorek T.: *Teoria wielowymiarowych układów dynamicznych liniowych*, WN-T, Warszawa 1983.
7. Krasovskij N.N.: *Tieoria uprawvlenija dviżenijem*, „Nauka", Moskva 1968.
8. Mikusiński J.: *Rachunek operatorów*, PWN, Warszawa 1957.
9. Ogata K.: *Metody przestrzeni stanów w teorii sterowania*, WN-T, Warszawa 1974.
10. Osiowski J.: *Zarys rachunku operatorowego. Teoria i zastosowania w elektrotechnice*, WN-T, Warszawa 1981.
11. Pełczewski W.: *Teoria sterowania*, WN-T, Warszawa 1980.
12. Przeworska-Rolewicz D.: *Wstęp do analizy algebraicznej i jej zastosowań*, WN-T, Warszawa 1979.

13. Szlenk W.: *Wstęp do teorii gładkich układów dynamicznych*, PWN, Warszawa 1982.
14. Wysocki H.: *Liniowe układy dynamiczne różniczkowe w ujęciu rachunku operatorów*, rozprawa doktorska, WAT, Warszawa 1982.
15. Yosida K.: *Operational Calculus*, A Theory of Hyperfunctions, Springer-Verlag, Tokyo1984.
16. Zabczyk J.: *Zarys matematycznej teorii sterowania*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1991.

Recenzent

prof. dr hab. inż. Andrzej Felski

Adres Autora

dr hab. inż. Andrzej Banachowicz, prof. nadzw. WSM
Wyższa Szkoła Morska w Szczecinie
Katedra Geomatyki
70-500 Szczecin, ul. Wały Chrobrego 1/2